

La función de Green y el Índice de Kirchhoff de redes cluster

C. Araúz¹, E. Bendito¹, A. Carmona¹ y A.M. Encinas¹

¹Dept. Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona. Spain

Objetivo

El Índice de Kirchhoff fue introducido en el campo de la Química Orgánica. Sirve para distinguir entre moléculas con estructuras muy similares.

Objetivo

El Índice de Kirchhoff fue introducido en el campo de la Química Orgánica. Sirve para distinguir entre moléculas con estructuras muy similares.

En el ámbito matemático resulta de mucho interés calcular este parámetro para redes compuestas y encontrar posibles relaciones entre los Índices de Kirchhoff de las redes de origen y sus composiciones.

Objetivo

El Índice de Kirchhoff fue introducido en el campo de la Química Orgánica. Sirve para distinguir entre moléculas con estructuras muy similares.

En el ámbito matemático resulta de mucho interés calcular este parámetro para redes compuestas y encontrar posibles relaciones entre los Índices de Kirchhoff de las redes de origen y sus composiciones.

En este trabajo se ha trabajado con una noción generalizada de dicho Índice. El objetivo es determinar el Índice de Kirchhoff generalizado de una familia de redes compuestas, las redes cluster, en función del Índice de Kirchhoff de las redes que la componen.

Notaciones y resultados básicos

- Red $\Gamma = (V, E, c)$

Notaciones y resultados básicos

- Red $\Gamma = (V, E, c)$
- Peso $\omega : V \longrightarrow (0, +\infty), \quad \sum_{x \in V} \omega^2(x) = 1$

Notaciones y resultados básicos

- Red $\Gamma = (V, E, c)$
- Peso $\omega : V \longrightarrow (0, +\infty), \quad \sum_{x \in V} \omega^2(x) = 1$
- Laplaciano $\mathcal{L} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$
$$\mathcal{L}(u)(x) = \sum_{y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))$$

Notaciones y resultados básicos

- Red $\Gamma = (V, E, c)$
- Peso $\omega : V \longrightarrow (0, +\infty), \quad \sum_{x \in V} \omega^2(x) = 1$
- Laplaciano $\mathcal{L} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$
$$\mathcal{L}(u)(x) = \sum_{y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))$$

El laplaciano es autoadjunto y semidefinido positivo

Notaciones y resultados básicos

- Red $\Gamma = (V, E, c)$
- Peso $\omega : V \longrightarrow (0, +\infty), \quad \sum_{x \in V} \omega^2(x) = 1$
- Laplaciano $\mathcal{L} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$
$$\mathcal{L}(u)(x) = \sum_{y \in V} c(x, y)(u(x) - u(y))$$

El laplaciano es autoadjunto y semidefinido positivo

- Potencial determinado por ω $q_\omega : V \longrightarrow \mathbb{R},$
$$q_\omega = -\omega^{-1} \mathcal{L}(\omega)$$

- Operador de Schrödinger respecto q_ω $\mathcal{L}_{q_\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$

$$\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) = \mathcal{L}(u) + q_\omega \cdot u$$

- Operador de Schrödinger respecto q_ω $\mathcal{L}_{q_\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$

$$\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) = \mathcal{L}(u) + q_\omega \cdot u$$

Resultados

- ▶ $\mathcal{L}_{q_\omega}$ autoadjunto, semidefinido positivo, singular

- Operador de Schrödinger respecto q_ω $\mathcal{L}_{q_\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$

$$\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) = \mathcal{L}(u) + q_\omega \cdot u$$

Resultados

- ▶ $\mathcal{L}_{q_\omega}$ autoadjunto, semidefinido positivo, singular
- ▶ $\mathcal{L}_{q_\omega}(v) = 0$ sii $v = a\omega$

- Operador de Schrödinger respecto q_ω $\mathcal{L}_{q_\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$

$$\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) = \mathcal{L}(u) + q_\omega \cdot u$$

Resultados

- ▶ $\mathcal{L}_{q_\omega}$ autoadjunto, semidefinido positivo, singular
- ▶ $\mathcal{L}_{q_\omega}(v) = 0$ sii $v = a\omega$

- Ecuación de Poisson sobre la red $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \tilde{f}$ en V

- Operador de Schrödinger respecto q_ω $\mathcal{L}_{q_\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$,

$$\mathcal{L}_{q_\omega}(u)(x) = \mathcal{L}(u) + q_\omega \cdot u$$

Resultados

- ▶ $\mathcal{L}_{q_\omega}$ autoadjunto, semidefinido positivo, singular
- ▶ $\mathcal{L}_{q_\omega}(v) = 0$ sii $v = a\omega$

- Ecuación de Poisson sobre la red $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \tilde{f}$ en V

Resultado

Dada $\tilde{f} \in \mathcal{C}(V)$, la ecuación de Poisson $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \tilde{f}$ tiene solución sii $\langle \omega, \tilde{f} \rangle = 0$; además, $\exists!$ u solución con $\langle u, \omega \rangle = 0$

- Operador de Green

$$\mathcal{G}_{q\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$$

$$f \in \mathcal{C}(V) \longmapsto \text{única } u \text{ tal que } \mathcal{L}_{q\omega}(u) = f - \langle \omega, f \rangle \omega \text{ y } \langle u, \omega \rangle = 0$$

- Operador de Green

$$\mathcal{G}_{q\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$$

$$f \in \mathcal{C}(V) \longmapsto \text{única } u \text{ tal que } \mathcal{L}_{q\omega}(u) = f - \langle \omega, f \rangle \omega \text{ y } \langle u, \omega \rangle = 0$$

Resultados

- $\mathcal{G}_{q\omega}$ *autoadjunto, semidefinido positivo y singular*

- Operador de Green

$$\mathcal{G}_{q\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$$

$$f \in \mathcal{C}(V) \longmapsto \text{única } u \text{ tal que } \mathcal{L}_{q\omega}(u) = f - \langle \omega, f \rangle \omega \text{ y } \langle u, \omega \rangle = 0$$

Resultados

- $\mathcal{G}_{q\omega}$ *autoadjunto, semidefinido positivo y singular*
- $\mathcal{G}_{q\omega}(v) = 0$ *sii* $v = a\omega$

- Operador de Green

$$\mathcal{G}_{q_\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$$

$$f \in \mathcal{C}(V) \longmapsto \text{única } u \text{ tal que } \mathcal{L}_{q_\omega}(u) = f - \langle \omega, f \rangle \omega \text{ y } \langle u, \omega \rangle = 0$$

Resultados

- $\mathcal{G}_{q_\omega}$ *autoadjunto, semidefinido positivo y singular*
- $\mathcal{G}_{q_\omega}(v) = 0$ *sii* $v = a\omega$
- $\mathcal{G}_{q_\omega}(\mathcal{L}_{q_\omega}(u)) = \mathcal{L}_{q_\omega}(\mathcal{G}_{q_\omega}(u)) = u - \langle u, \omega \rangle \omega \quad \forall u \in \mathcal{C}(V)$

- Operador de Green

$$\mathcal{G}_{q\omega} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V),$$

$$f \in \mathcal{C}(V) \longmapsto \text{única } u \text{ tal que } \mathcal{L}_{q\omega}(u) = f - \langle \omega, f \rangle \omega \text{ y } \langle u, \omega \rangle = 0$$

Resultados

- $\mathcal{G}_{q\omega}$ *autoadjunto, semidefinido positivo y singular*
- $\mathcal{G}_{q\omega}(v) = 0$ *sii* $v = a\omega$
- $\mathcal{G}_{q\omega}(\mathcal{L}_{q\omega}(u)) = \mathcal{L}_{q\omega}(\mathcal{G}_{q\omega}(u)) = u - \langle u, \omega \rangle \omega \quad \forall u \in \mathcal{C}(V)$

- Núcleo de Green

$$G_{q\omega} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$G_{q\omega}(x, y) = \mathcal{G}_{q\omega}(\varepsilon_y)(x)$$

- Resistencia efectiva respecto de ω $R_\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q\omega}(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)} \text{ , } R_\omega(x, y) = \langle \mathcal{L}_{q\omega} u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}$$

- Resistencia efectiva respecto de ω $R_\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)} \text{ , } R_\omega(x, y) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}$$

- Resistencia total respecto de ω $r_\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(v) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega \text{ , } r_\omega(x) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} v, v \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{1}{n} \langle v, \omega \rangle$$

- Resistencia efectiva respecto de ω $R_\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)} \text{ , } R_\omega(x, y) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}$$

- Resistencia total respecto de ω $r_\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(v) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega \text{ , } r_\omega(x) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} v, v \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{1}{n} \langle v, \omega \rangle$$

Resultados

- R_ω simétrica, no negativa

- Resistencia efectiva respecto de ω $R_\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)} \text{ , } R_\omega(x, y) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}$$

- Resistencia total respecto de ω $r_\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(v) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega \text{ , } r_\omega(x) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} v, v \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{1}{n} \langle v, \omega \rangle$$

Resultados

- R_ω simétrica, no negativa
- $R_\omega(x, y) = 0$ si $x = y$

- Resistencia efectiva respecto de ω $R_\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)} \text{ , } R_\omega(x, y) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}$$

- Resistencia total respecto de ω $r_\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(v) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega \text{ , } r_\omega(x) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} v, v \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{1}{n} \langle v, \omega \rangle$$

Resultados

- R_ω simétrica, no negativa
- $R_\omega(x, y) = 0$ sii $x = y$
- $r_\omega(x) = \frac{G_{q_\omega}(x, x)}{\omega^2(x)}$

- Resistencia efectiva respecto de ω $R_\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(u) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)} \text{ , } R_\omega(x, y) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} u, u \rangle = \frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}$$

- Resistencia total respecto de ω $r_\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \mathcal{L}_{q_\omega}(v) = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \omega \text{ , } r_\omega(x) = \langle \mathcal{L}_{q_\omega} v, v \rangle = \frac{v(x)}{\omega(x)} - \frac{1}{n} \langle v, \omega \rangle$$

Resultados

- R_ω *simétrica, no negativa*
- $R_\omega(x, y) = 0$ *sii* $x = y$
- $r_\omega(x) = \frac{G_{q_\omega}(x, x)}{\omega^2(x)}$
- $R_\omega(x, y) = r_\omega(x) + r_\omega(y) - 2 \frac{G_{q_\omega}(x, y)}{\omega(x)\omega(y)}$

- Índice de Kirchhoff respecto de ω

$$k(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} R_{\omega}(x,y) \omega^2(x) \omega^2(y)$$

- Índice de Kirchhoff respecto de ω

$$k(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} R_{\omega}(x,y) \omega^2(x) \omega^2(y)$$

Resultado

$$k(\omega) = \sum_{x \in V} r_{\omega}(x) \omega^2(x) = \sum_{x \in V} G_{q_{\omega}}(x, x)$$

Redes cluster

Γ_0 red base , $V(\Gamma_0) = \{x_1, \dots, x_m\}$

Redes cluster

Γ_0 red base , $V(\Gamma_0) = \{x_1, \dots, x_m\}$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ redes satélite, con $x_i \in V(\Gamma_i)$

Redes cluster

Γ_0 red base , $V(\Gamma_0) = \{x_1, \dots, x_m\}$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ redes satélite, con $x_i \in V(\Gamma_i)$

• $\Gamma = \Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\} = (V, E, c)$ red cluster

Redes cluster

Γ_0 red base , $V(\Gamma_0) = \{x_1, \dots, x_m\}$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ redes satélite, con $x_i \in V(\Gamma_i)$

• $\Gamma = \Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\} = (V, E, c)$ red cluster

$V = \bigcup_{i=1}^m V(\Gamma_i)$, $E = \bigcup_{i=0}^m E(\Gamma_i)$ y c viene dada por las conductancias originales de cada red

Redes cluster

Γ_0 red base , $V(\Gamma_0) = \{x_1, \dots, x_m\}$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ redes satélite, con $x_i \in V(\Gamma_i)$

• $\Gamma = \Gamma_0 \{ \Gamma_1, \dots, \Gamma_m \} = (V, E, c)$ red cluster

$V = \bigcup_{i=1}^m V(\Gamma_i)$, $E = \bigcup_{i=0}^m E(\Gamma_i)$ y c viene dada por las conductancias originales de cada red

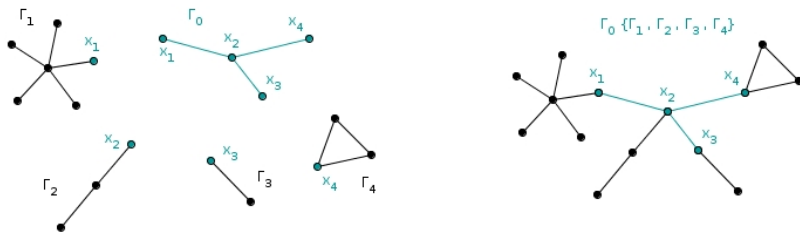


Figura: Ejemplo de red cluster

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
 σ_i coeficientes tales que $\omega_i = \sigma_i^{-1}\omega$ peso en Γ_i

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
 σ_i coeficientes tales que $\omega_i = \sigma_i^{-1}\omega$ peso en Γ_i
- $\mathcal{L}^i$ laplaciano de Γ_i

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
 σ_i coeficientes tales que $\omega_i = \sigma_i^{-1}\omega$ peso en Γ_i
- $\mathcal{L}^i$ laplaciano de Γ_i
 $\mathcal{L}$ laplaciano de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
 σ_i coeficientes tales que $\omega_i = \sigma_i^{-1}\omega$ peso en Γ_i
- $\mathcal{L}^i$ laplaciano de Γ_i
 $\mathcal{L}$ laplaciano de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $\mathcal{L}_{q\omega_i}^i$ operador de Schrödinger de Γ_i

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
 σ_i coeficientes tales que $\omega_i = \sigma_i^{-1}\omega$ peso en Γ_i
- $\mathcal{L}^i$ laplaciano de Γ_i
 $\mathcal{L}$ laplaciano de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $\mathcal{L}_{q\omega_i}^i$ operador de Schrödinger de Γ_i
 $\mathcal{L}_{q\omega}$ operador de Schrödinger de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
 σ_i coeficientes tales que $\omega_i = \sigma_i^{-1}\omega$ peso en Γ_i
- $\mathcal{L}^i$ laplaciano de Γ_i
 $\mathcal{L}$ laplaciano de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $\mathcal{L}_{q\omega_i}^i$ operador de Schrödinger de Γ_i
 $\mathcal{L}_{q\omega}$ operador de Schrödinger de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultados

- $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}^i(u) + \mathcal{L}^0(u)(x_i)\varepsilon_{x_i}$ en V_i , $i = 1, \dots, m$

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
 σ_i coeficientes tales que $\omega_i = \sigma_i^{-1}\omega$ peso en Γ_i
- $\mathcal{L}^i$ laplaciano de Γ_i
 $\mathcal{L}$ laplaciano de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $\mathcal{L}_{q_{\omega_i}}^i$ operador de Schrödinger de Γ_i
 $\mathcal{L}_{q_{\omega}}$ operador de Schrödinger de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultados

- $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}^i(u) + \mathcal{L}^0(u)(x_i)\varepsilon_{x_i}$ en V_i , $i = 1, \dots, m$
- $q_{\omega} = q_{\omega_i} + q_{\omega_0}(x_i)\varepsilon_{x_i}$ en V_i , $i = 1, \dots, m$

Laplaciano, op. de Schrödinger del cluster

- ω peso en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
 σ_i coeficientes tales que $\omega_i = \sigma_i^{-1}\omega$ peso en Γ_i
- $\mathcal{L}^i$ laplaciano de Γ_i
 $\mathcal{L}$ laplaciano de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $\mathcal{L}_{q\omega_i}^i$ operador de Schrödinger de Γ_i
 $\mathcal{L}_{q\omega}$ operador de Schrödinger de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultados

- $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}^i(u) + \mathcal{L}^0(u)(x_i)\varepsilon_{x_i}$ en V_i , $i = 1, \dots, m$
- $q_\omega = q_{\omega_i} + q_{\omega_0}(x_i)\varepsilon_{x_i}$ en V_i , $i = 1, \dots, m$
- $\mathcal{L}_{q\omega}(u) = \mathcal{L}_{q\omega_i}^i(u) + \mathcal{L}_{q\omega_0}^0(u)(x_i)\varepsilon_{x_i}$ en V_i , $i = 1, \dots, m$

Núcleo de Green del cluster

- $\mathcal{G}_{q\omega_i}^i$ operador de Green respecto de ω_i de Γ_i

Núcleo de Green del cluster

- $\mathcal{G}_{q\omega_i}^i$ operador de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $\mathcal{G}_{q\omega}$ operador de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Núcleo de Green del cluster

- $\mathcal{G}_{q\omega_i}^i$ operador de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $\mathcal{G}_{q\omega}$ operador de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $G_{q\omega_i}^i$ núcleo de Green respecto de ω_i de Γ_i

Núcleo de Green del cluster

- $\mathcal{G}_{q\omega_i}^i$ operador de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $\mathcal{G}_{q\omega}$ operador de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $G_{q\omega_i}^i$ núcleo de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $G_{q\omega}$ núcleo de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Núcleo de Green del cluster

- $\mathcal{G}_{q\omega_i}^i$ operador de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $\mathcal{G}_{q\omega}$ operador de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $G_{q\omega_i}^i$ núcleo de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $G_{q\omega}$ núcleo de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultado

Sea $f \in \mathcal{C}(V)$ con $\langle \omega, f \rangle = 0$

Núcleo de Green del cluster

- $\mathcal{G}_{q\omega_i}^i$ operador de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $\mathcal{G}_{q\omega}$ operador de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $G_{q\omega_i}^i$ núcleo de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $G_{q\omega}$ núcleo de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultado

Sea $f \in \mathcal{C}(V)$ con $\langle \omega, f \rangle = 0$

Si $u \in \mathcal{C}(V)$ con $\mathcal{L}_{q\omega}(u) = f$ y $\langle \omega, u \rangle = 0$,

Núcleo de Green del cluster

- $\mathcal{G}_{q\omega_i}^i$ operador de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $\mathcal{G}_{q\omega}$ operador de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- $G_{q\omega_i}^i$ núcleo de Green respecto de ω_i de Γ_i
 $G_{q\omega}$ núcleo de Green respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultado

Sea $f \in \mathcal{C}(V)$ con $\langle \omega, f \rangle = 0$

Si $u \in \mathcal{C}(V)$ con $\mathcal{L}_{q\omega}(u) = f$ y $\langle \omega, u \rangle = 0$,

$$u = \sum_{i=1}^m \left(\mathcal{G}_{q\omega_i}^i(f) - A_{f,i} \mathcal{G}_{q\omega_i}^i(\varepsilon_{x_i}) + B_{f,i} \omega_i \right) - C_f \omega,$$

donde $A_{f,i}$, $B_{f,i}$ y C_f coeficientes reales que dependen del dato f

Resultado

El núcleo de Green de la red cluster viene dado por

Resultado

El núcleo de Green de la red cluster viene dado por

$$\begin{aligned} G_{q_\omega} &= G_{q_{\omega_j}}^j(\cdot, \cdot) + D_j G_{q_{\omega_j}}^j(x_j, \cdot) \otimes \omega_j + F_j \omega_j \otimes G_{q_{\omega_j}}^j(\cdot, x_j) + H_j \omega_j \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_j \times V_j, j = 1, \dots, m, \\ G_{q_\omega} &= D_{i,j} G_{q_{\omega_i}}^i(\cdot, x_i) \otimes \omega_j + F_{i,j} \omega_i \otimes G_{q_{\omega_j}}^j(x_j, \cdot) + H_{i,j} \omega_i \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_i \times V_j, j = 1, \dots, m, i \neq j, \end{aligned}$$

donde los coeficientes son reales

Resultado

El núcleo de Green de la red cluster viene dado por

$$\begin{aligned} G_{q\omega} &= G_{q\omega_j}^j(\cdot, \cdot) + D_j G_{q\omega_j}^j(x_j, \cdot) \otimes \omega_j + F_j \omega_j \otimes G_{q\omega_j}^j(\cdot, x_j) + H_j \omega_j \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_j \times V_j, j = 1, \dots, m, \\ G_{q\omega} &= D_{i,j} G_{q\omega_i}^i(\cdot, x_i) \otimes \omega_j + F_{i,j} \omega_i \otimes G_{q\omega_j}^j(x_j, \cdot) + H_{i,j} \omega_i \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_i \times V_j, j = 1, \dots, m, i \neq j, \end{aligned}$$

donde los coeficientes son reales

- R_{ω_i} resistencia efectiva respecto de ω_i en Γ_i

Resultado

El núcleo de Green de la red cluster viene dado por

$$\begin{aligned} G_{q\omega} &= G_{q\omega_j}^j(\cdot, \cdot) + D_j G_{q\omega_j}^j(x_j, \cdot) \otimes \omega_j + F_j \omega_j \otimes G_{q\omega_j}^j(\cdot, x_j) + H_j \omega_j \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_j \times V_j, j = 1, \dots, m, \\ G_{q\omega} &= D_{i,j} G_{q\omega_i}^i(\cdot, x_i) \otimes \omega_j + F_{i,j} \omega_i \otimes G_{q\omega_j}^j(x_j, \cdot) + H_{i,j} \omega_i \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_i \times V_j, j = 1, \dots, m, i \neq j, \end{aligned}$$

donde los coeficientes son reales

- R_{ω_i} resistencia efectiva respecto de ω_i en Γ_i
 R_{ω} resistencia efectiva respecto de ω en $\Gamma_0 \cup \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultado

El núcleo de Green de la red cluster viene dado por

$$\begin{aligned} G_{q\omega} &= G_{q\omega_j}^j(\cdot, \cdot) + D_j G_{q\omega_j}^j(x_j, \cdot) \otimes \omega_j + F_j \omega_j \otimes G_{q\omega_j}^j(\cdot, x_j) + H_j \omega_j \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_j \times V_j, j = 1, \dots, m, \\ G_{q\omega} &= D_{i,j} G_{q\omega_i}^i(\cdot, x_i) \otimes \omega_j + F_{i,j} \omega_i \otimes G_{q\omega_j}^j(x_j, \cdot) + H_{i,j} \omega_i \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_i \times V_j, j = 1, \dots, m, i \neq j, \end{aligned}$$

donde los coeficientes son reales

- R_{ω_i} resistencia efectiva respecto de ω_i en Γ_i
 R_{ω} resistencia efectiva respecto de ω en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- r_{ω_i} resistencia total respecto de ω_i en Γ_i

Resultado

El núcleo de Green de la red cluster viene dado por

$$\begin{aligned} G_{q_\omega} &= G_{q_{\omega_j}}^j(\cdot, \cdot) + D_j G_{q_{\omega_j}}^j(x_j, \cdot) \otimes \omega_j + F_j \omega_j \otimes G_{q_{\omega_j}}^j(\cdot, x_j) + H_j \omega_j \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_j \times V_j, j = 1, \dots, m, \\ G_{q_\omega} &= D_{i,j} G_{q_{\omega_i}}^i(\cdot, x_i) \otimes \omega_j + F_{i,j} \omega_i \otimes G_{q_{\omega_j}}^j(x_j, \cdot) + H_{i,j} \omega_i \otimes \omega_j, \\ &\quad \text{en } V_i \times V_j, j = 1, \dots, m, i \neq j, \end{aligned}$$

donde los coeficientes son reales

- R_{ω_i} resistencia efectiva respecto de ω_i en Γ_i
 R_ω resistencia efectiva respecto de ω en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$
- r_{ω_i} resistencia total respecto de ω_i en Γ_i
 r_ω resistencia total respecto de ω en $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Índice de Kirchhoff del cluster

- $k_i(\omega_i)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω_i de Γ_i

Índice de Kirchhoff del cluster

- $k_i(\omega_i)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω_i de Γ_i
 $k(\omega)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Índice de Kirchhoff del cluster

- $k_i(\omega_i)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω_i de Γ_i
 $k(\omega)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultados

- $R_\omega(x, y) = \frac{R_{\omega_i}(x, y)}{\sigma_i^2} \quad \text{si } x, y \in V_i;$

Índice de Kirchhoff del cluster

- $k_i(\omega_i)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω_i de Γ_i
 $k(\omega)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultados

- $$R_\omega(x, y) = \frac{R_{\omega_i}(x, y)}{\sigma_i^2} \quad \text{si } x, y \in V_i;$$
$$R_\omega(x, y) = \frac{R_{\omega_j}(x, x_j)}{\sigma_j^2} + \frac{R_{\omega_i}(y, x_i)}{\sigma_i^2} + \frac{R_{\omega_0}(x_i, x_j)}{\sigma_0^2} +$$
$$+ L_j r_{\omega_j}(x_j) + M_i r_{\omega_i}(x_i) + N_{ij}$$

$$\text{si } x \in V_j, \quad y \in V_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq j,$$

donde los coeficientes son reales

Índice de Kirchhoff del cluster

- $k_i(\omega_i)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω_i de Γ_i
 $k(\omega)$ Índice de Kirchhoff respecto de ω de $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$

Resultados

- $$R_\omega(x, y) = \frac{R_{\omega_i}(x, y)}{\sigma_i^2} \quad \text{si } x, y \in V_i;$$
$$R_\omega(x, y) = \frac{R_{\omega_j}(x, x_j)}{\sigma_j^2} + \frac{R_{\omega_i}(y, x_i)}{\sigma_i^2} + \frac{R_{\omega_0}(x_i, x_j)}{\sigma_0^2} +$$
$$+ L_j r_{\omega_j}(x_j) + M_i r_{\omega_i}(x_i) + N_{ij}$$

$$\text{si } x \in V_j, \quad y \in V_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq j,$$

donde los coeficientes son reales

- $$k(\omega) = \sum_{i=1}^m k_i(\omega_i) + \sum_{i,j=1}^m \frac{\sigma_i^2 \sigma_j^2}{2\sigma_0^2} R_{\omega_0}(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^m \left((1 - \sigma_i^2) \sum_{x \in V_i} r_{\omega_i}(x_i) \right)$$

Aplicaciones

Sea Γ_0 grafo base (grafo = conductancias 1), con m nodos

Aplicaciones

Sea Γ_0 grafo base (grafo = conductancias 1), con m nodos

Sean $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ copias de un mismo grafo, con n vértices cada una

Aplicaciones

Sea Γ_0 grafo base (grafo = conductancias 1), con m nodos

Sean $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ copias de un mismo grafo, con n vértices cada una

Consideramos $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$. Tomamos el peso constante en toda la red cluster, $\omega = w$

Aplicaciones

Sea Γ_0 grafo base (grafo = conductancias 1), con m nodos

Sean $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ copias de un mismo grafo, con n vértices cada una

Consideramos $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$. Tomamos el peso constante en toda la red cluster, $\omega = w$

Resultado

El Índice de Kirchhoff de este ejemplo viene dado por

$$k(\omega) = k_1(\omega_1) + nk_0(\omega_0) + \frac{m-1}{n} \sum_{x \in V_1} R_{\omega_1}(x, x_1)$$

Aplicaciones

Sea Γ_0 grafo base (grafo = conductancias 1), con m nodos

Sean $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ copias de un mismo grafo, con n vértices cada una

Consideramos $\Gamma_0\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$. Tomamos el peso constante en toda la red cluster, $\omega = w$

Resultado

El Índice de Kirchhoff de este ejemplo viene dado por

$$k(\omega) = k_1(\omega_1) + nk_0(\omega_0) + \frac{m-1}{n} \sum_{x \in V_1} R_{\omega_1}(x, x_1)$$

Este caso particular fue estudiado por Li, Yang y Zhang (2009) para el grafo cluster con la noción no generalizada del Índice de Kirchhoff y se ha podido comprobar que, restringiendo la noción generalizada a este ejemplo, el presente trabajo y el de Li, Yang y Zhang coinciden en sus resultados

Gracias