La cohomología de una red finita ⋆

E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas y J.M. Gesto[1]

Departament de Matemàtica Aplicada III. UPC angeles.carmona@upc.edu

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio de la Cohomología de una red pesada puramente resistiva basándonos en una definición adecuada del operador rotacional. Como consecuencia, obtenemos también los análogos discretos del Teorema de Poincaré y de la Descomposición de Hodge. Finalmente, presentamos la aplicación de estos conceptos a redes uniformes n-dimensionales.

Palabras clave: Redes puramente resistivas, Laplaciano, Rotacional, Descomposición de Hodge, Descomposición Helmholtz

1 Introducción

En este trabajo presentamos el concepto de operador rotacional de una red. Aunque tal operador puede ser considerarado en situaciones mucho más generales, ver [4], hemos preferido restringirnos aquí a las denominadas *redes puramente resistivas*, para las cuales queda en cierto modo completado el cálculo vectorial discreto desarrollado por los autores, [2,3]. A partir del rotacional puede considerarse también una adecuada versión discreta de la Cohomología de De Rham de una variedad compacta así como el análogo del Laplaciano de Hodge. Una de las características esenciales de nuestras técnicas es la de considerar campos más generales que los denominados flujos, que son los habituales en este ámbito, ver por ejemplo [1,5,6]. La ausencia de campos generales en estos trabajos hace inviable la noción de rotacional y consecuentemente los resultados sobre descomposición de campos, ver por ejemplo [1], no contienen toda la posible información sobre la estructura de la red. De hecho, la versión de la Descomposición de Hodge que presentamos aquí, representa no sólo una versión mimética a su contrapartida continua, sino también una respuesta satisfactoria al problema planteado por K. Gustafson y F. Harary en [7], relativo la descomposición ortogonal de un grafo en una parte irrotacional, otra solenoidal y otra simultáneamente irrotacional y solenoidal.

⋆ Trabajo parcialmente financiado por la ETSECCPB y la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (MTM2007-6252)

A modo de ilustración de los conceptos introducidos, analizaremos la expresión de los operadores en redes puramente resistivas construidas sobre retículas uniformes n-dimensionales

2 Preliminares

En todo el trabajo, $\Gamma = (V, E)$ denota un grafo simple, conexo y sin lazos, cuyos conjuntos de vértices y ramas son V y E, respectivamente. Cuando Γ es finito, el número $\chi(\Gamma) = |V| - |E|$ es *la característica de Euler* of Γ y es bien conocido que $\chi(\Gamma) \leq 1$ y que la igualdad se satisface sii Γ es un árbol. Dos vértices diferentes $x, y \in V$ se denominan *adjacentes*, lo que se representa como $x \sim y$, si $\{x, y\} \in E$ y entonces la rama $\{x, y\}$ se denota por e_{xy}. Una *orientación* en Γ es una aplicación $\tau\colon E \longrightarrow V$ tal que $\tau(\{x, y\}) \in \{x, y\}$. Si $e \in E$, el vértice $x = \tau(e)$ se denomina *final de* e, mientras que el vértice y tal que $e = e_{xy}$ se denomina *origen de* e y se denota por $\omega(e)$. En lo sucesivo supondremos que se ha fijado sobre Γ una orientación τ.

Como es usual, denotaremos por $\mathcal{C}(V)$ y $\mathcal{C}(E)$ a los espacios vectoriales de las funciones reales definidas en los vértices o en las ramas de Γ, respectivamente. Una función $\nu \in \mathcal{C}(V)$ se denomina *peso* si $\nu(x) > 0$ para cada $x \in V$, mientras que una función $r \in \mathcal{C}(E)$ tal que $r(e) > 0$ para cada $e \in E$ se denomina *resistencia en* Γ. Si r es una resistencia, su *conductancia asociada* es la función $c = r^{-1} \in \mathcal{C}(E)$.

Una *red puramente resistiva*, en adelante simplemente red, es una terna (Γ, r, ν), donde r es una resistencia y ν un peso.

Un *campo vectorial sobre* Γ es una función del espacio vectorial

$$\mathcal{X}(\Gamma) = \{\mathsf{f}\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \;\text{ tal que }\; \mathsf{f}(x, y) = 0 \;\text{ si}\, x \not\sim y\}.$$

Un campo $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se denomina *simétrico* o *antisimétrico* si $\mathsf{f}(x, y) = \mathsf{f}(y, x)$ o $\mathsf{f}(x, y) = -\mathsf{f}(y, x)$ para cada $x, y \in V$, respectivamente. Denotaremos por $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ y por $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ los subespacios vectoriales de campos simétricos y antisimétricos, repectivamente. Es claro que $\mathcal{X}(\Gamma) = \mathcal{X}^s(\Gamma) \oplus \mathcal{X}^a(\Gamma)$, de manera que cada campo f puede descomponerse de manera única como suma de un campo simétrico, su parte simétrica f^s y de otro antisimétrico, su parte antisimétrica f^a. También es claro que $\mathcal{X}^s(\Gamma)$ está naturalmente identificado con $\mathcal{C}(E)$, lo que en particular implica que tanto la resistencia como la conductancia pueden considerarse como campos simétricos tales que $r(x, y), c(x, y) > 0$ sii $x \sim y$, mientras que la orientación τ permite también identificar $\mathcal{X}^a(\Gamma)$ con $\mathcal{C}(E)$, ver [1,5,12].

Dados $u, v \in \mathcal{C}(V)$ y $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, las expresiones

$$\langle u, v\rangle_\nu = \sum_{x \in V} u(x)v(x)\nu(x) \quad \text{ y } \quad \langle \mathsf{f}, \mathsf{g}\rangle_r = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} r(x, y)\mathsf{f}(x, y)\mathsf{g}(x, y)$$

definen sendos productos internos en $\mathcal{C}(V)$ y $\mathcal{X}(\Gamma)$. En particular, la descomposición $\mathcal{X}(\Gamma) = \mathcal{X}^s(\Gamma) \oplus \mathcal{X}^a(\Gamma)$ es ortogonal y por tanto tenemos que $\langle \mathsf{f}, \mathsf{g}\rangle_r = \langle \mathsf{f}^s, \mathsf{g}^s\rangle_r + \langle \mathsf{f}^a, \mathsf{g}^a\rangle_r$. Además si nos restringimos al espacio $\mathcal{C}(E)$, identificado con campos simétricos o antisimétricos, según convenga, entonces $\langle \mathsf{f}, \mathsf{g}\rangle_r = \sum\limits_{e\in E} r(e)\mathsf{f}(e)\mathsf{g}(e)$, de manera que el producto interno sobre $\mathcal{C}(E)$ coincide con el que se usa habitualmente en el contexto de redes, ver por ejemplo [9,10,13].

El *gradiente* es el operador $\nabla\colon \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{X}^s(\Gamma)$ que asigna a $u \in \mathcal{C}(V)$ el campo simétrico definido para cada $x, y \in V$ como

$$(\nabla u)(x,y) = c(x,y)\Big(u\big(\tau(e_{xy})\big) - u\big(\omega(e_{xy})\big)\Big), \tag{1}$$

o, $\nabla u(e) = c(e)\Big(u\big(\tau(e)\big) - u\big(\omega(e)\big)\Big)$, para cada $e \in E$, si identificamos ∇u con una función de $\mathcal{C}(E)$. Un campo vectorial $\mathsf{f} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$ se denomina *gradiente* si existe $u \in \mathcal{C}(\Gamma)$ tal que $\mathsf{f} = \nabla u$. Es claro que $\nabla u = \mathsf{0}$ sii u es constante.

La *divergencia* es el operador $\mathsf{div} = -\nabla^*$ y un campo se denomina *solenoidal* si su divergencia es nula. Es claro que para cada $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ la función $\mathsf{div}\,\mathsf{f}$ está determinada por la identidad $\langle u, \mathsf{div}\,\mathsf{f}\rangle_\nu = -\langle \nabla u, \mathsf{f}\rangle_r$, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$, lo que implica que para cada $x \in V$

$$\mathsf{div}\,\mathsf{f}(x) = \frac{1}{\nu(x)}\left[\sum_{\omega(e_{xy})=x} \mathsf{f}^s(x,y) - \sum_{\tau(e_{xy})=x} \mathsf{f}^s(x,y)\right] \tag{2}$$

o, identificando f^s con una función de $\mathcal{C}(E)$,

$$\mathsf{div}\,\mathsf{f}(x) = \frac{1}{\nu(x)}\left[\sum_{\omega(e)=x} \mathsf{f}^s(e) - \sum_{\tau(e)=x} \mathsf{f}^s(e)\right]$$

y en particular, el operador div no depende de la resistencia y todo campo antisimétrico es solenoidal.

Denominaremos *rotacional* al operador $\mathsf{rot} : \mathcal{X}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{X}^a(\Gamma)$ que asigna a $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ el campo antisimétrico definido para cada $x, y \in V$ como

$$\mathsf{rot}\,\mathsf{f}(x,y) = r(x,y)\mathsf{f}^a(x,y). \tag{3}$$

de manera que f es *irrotacional*, es decir $\mathsf{rot}\,\mathsf{f} = \mathsf{0}$, sii $\mathsf{f} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$.

El siguiente resultado muestra que los anteriores operadores satisfacen propiedades miméticas a las de sus análogos continuos y pueden por tanto ser utilizados para desarrollar un cálculo vectorial coherente sobre redes.

Proposición 1. $\mathsf{div} \circ \mathsf{rot} = 0$, $\mathsf{rot} \circ \nabla = \mathsf{0}$ y $\mathsf{rot}^* = \mathsf{rot}$.

Demostración. Las dos primeras identidades se deducen directamente de las definiciones. Por otra parte, si $\mathsf{f},\mathsf{h}\in\mathcal{X}(\Gamma)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{rot}\mathsf{f},\mathsf{h}\rangle_r &= \langle \operatorname{rot}\,\mathsf{f},\mathsf{h}^{\mathrm{a}}\rangle_r = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} r(x,y)\mathsf{f}^{\mathrm{a}}(x,y)\mathsf{h}^{\mathrm{a}}(x,y)\\ &= \langle \mathsf{f}^{\mathrm{a}},\operatorname{rot}\mathsf{h}\rangle_r = \langle \mathsf{f},\operatorname{rot}\mathsf{h}\rangle_r. \qquad \square\end{aligned}$$

Observamos que las anteriores identidades se mantienen válidas, y lo mismo ocurre con todas las propiedades que analizaremos en la siguiente sección, si en lugar de la definición del rotacional que hemos adoptado, consideramos cualquier múltiplo no nulo, es decir si tomamos $\operatorname{rot}\mathsf{f}(x,y)=a\,r(x,y)\mathsf{f}^{\mathrm{a}}(x,y)$, donde $a\in\mathbb{R}$ es un valor fijo no nulo.

3 La cohomología de una red finita

Si bien la terminología y técnicas de la Topología Algebraica han configurado un tratamiento riguroso de las redes infinitas, ver por ejemplo [13], este no ha sido el caso de las redes finitas y las únicas menciones a este lenguaje parecen ser [1,5,6,12]. Nuestro objetivo fundamental es mostrar que la situación en redes finitas es mimética a la de variedades Riemannianas compactas, concretamente que el análogo discreto de la *Cohomología de De Rham* proporciona las mismas propiedades que la cohomología ordinaria en el ámbito de la Topología Algebraica. Además los operadores introducidos en la seccción precedente permiten considerar el denominado *Laplaciano de Hodge* sobre el espacio de campos. Aunque este tipo de construcciones no son nuevas, ver [6,8,11], el Laplaciano de Hodge se obtiene en estos trabajos considerando la red como el 1-esqueleto de un complejo simplicial cuya dimensión es igual a la del espacio ambiente, mientras que aquí no es preciso que el grafo subyacente forme parte de un CW-complejo de dimensión superior. Teniendo en cuenta la Proposición 1 definimos el *Complejo de De Rham de la red* como

$$0 \overset{0}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(V) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{X}(\Gamma) \xrightarrow{\operatorname{rot}} \mathcal{X}(\Gamma) \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathcal{C}(V) \xrightarrow{0} 0 \tag{4}$$

y denominamos *grupos de cohomología de De Rham* a $H^0(\Gamma)=\ker\nabla$ y $H^1(\Gamma)=\ker\operatorname{rot}/\operatorname{Img}\nabla$.

Proposición 2. *Si Γ es finita, se satisface la Fórmula de Euler-Poincaré, $\chi(\Gamma)=\dim H^0(\Gamma)-\dim H^1(\Gamma)$, y además los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *Γ es un árbol.*
ii) *$H^1(\Gamma)$ es trivial.*
iii) *Cada campo solenoidal es el rotacional de otro campo.*
iv) *Cada campo irrotacional es un campo gradiente.*

Demostración. Como $\dim \mathcal{C}(V) = |V|$ y $\dim \mathcal{X}^s(\Gamma) = \dim \mathcal{X}^a(\Gamma) = \dim \mathcal{C}(E) = |E|$, de la identidad $\dim \ker \nabla = 1$ se deduce que $\dim \mathrm{Img} \nabla = |V| - 1$ y por tanto que $\dim \ker \mathsf{div} = 2|E| - |V| + 1$, ya que $\ker \mathsf{div} = [\mathrm{Img}\, \nabla]^{\perp}$. Por otra parte, $\dim \ker \mathsf{rot} = \dim \mathcal{X}^s(\Gamma) = |E|$ y como $\mathrm{Img}\, \mathsf{rot} = [\ker \mathsf{rot}\,]^{\perp}$, $\dim \mathrm{Img}\, \mathsf{rot} = |E|$.

Las identidades anteriores implican que $\dim H^0(\Gamma) = 1$, mientras que $\dim H^1(\Gamma) = |E| - |V| + 1 = 1 - \chi(\Gamma)$, de donde obtenemos la Fórmula de Euler y también la equivalencia entre (i) y (ii).

Por otra parte, como $\dim \ker \mathsf{div} = |E| + 1 - \chi(\Gamma)$, Γ es un árbol sii $\dim \ker \mathsf{div} = |E|$ o, de manera equivalente, sii $\dim \mathrm{Img}\, \nabla = |E|$. Como $\mathrm{Img}\, \mathsf{rot} \subset \ker \mathsf{div}$ e $\mathrm{Img}\, \nabla \subset \ker \mathsf{rot}$, resulta que cada campo solenoidal es el rotacional de otro sii $\dim \ker \mathsf{div} = |E|$, es decir, sii Γ es un árbol, mientras que cada campo irrotacional es gradiente sii $\dim \mathrm{Img}\, \nabla = |E|$, es decir sii Γ es un árbol. □

Si tenemos presente que los árboles son los únicos grafos cuya realización geométrica es un CW-complejo unidimensional simplemente conexo, de hecho contráctil, el anterior resultado debe interpretarse como el análogo discreto del *Lema de Poincaré.*

Denominamos operador de *Laplace-Beltrami* o simplemente *Laplaciano* y *Laplaciano de Hodge* a los endomorfismos de $\mathcal{C}(V)$ y $\mathcal{X}(\Gamma)$ definidos respectivamente como

$$\Delta = -\mathsf{div} \circ \nabla \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Delta} = \mathsf{rot} \circ \mathsf{rot} - \nabla \circ \mathsf{div}. \tag{5}$$

Además, $u \in \mathcal{C}(V)$ es una función *armónica* si $\Delta u = 0$, mientras que $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ es un campo *armónico* si $\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f} = 0$.

Si $u \in \mathcal{C}(V)$ es fácil concluir que $\Delta u(x) = \dfrac{1}{\nu(x)} \sum\limits_{y \in V} c(x,y)\big(u(x) - u(y)\big)$ para cada $x \in V$, de manera que Δ no depende de la orientación. Así pues, si $\nu = 1$ entonces Δ es *Laplaciano combinatorio* estándar, mientras que si ν es el grado generalizado, es decir $\nu(x) = \sum\limits_{y \in V} c(x,y)$ para cada $x \in V$, entonces Δ es el denominado *Laplaciano probabilístico.* Por otra parte, si $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, entonces para cada $x, y \in V$ se tiene que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f}(x,y) &= r(x,y)^2 \mathsf{f}^a(x,y) \\ &\quad - \frac{c(x,y)}{\nu\big(\tau(e_{xy})\big)} \left[\sum_{\omega(e) = \tau(e_{xy})} \mathsf{f}^s\big(\tau(e_{xy}), \tau(e)\big) - \sum_{\tau(e) = \tau(e_{xy})} \mathsf{f}^s\big(\tau(e_{xy}), \omega(e)\big) \right] \\ &\quad + \frac{c(x,y)}{\nu\big(\omega(e_{xy})\big)} \left[\sum_{\omega(e) = \omega(e_{xy})} \mathsf{f}^s\big(\omega(e_{xy}), \tau(e)\big) - \sum_{\tau(e) = \omega(e_{xy})} \mathsf{f}^s\big(\omega(e_{xy}), \omega(e)\big) \right]\end{aligned}$$

En particular, $\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f} = \mathsf{rot}\ \mathsf{rot}\ \mathsf{f}$ si $\mathsf{f} \in \mathcal{X}^a(\Gamma)$, mientras que $\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f} = -\nabla\, \mathsf{div} \mathsf{f}$ si $\mathsf{f} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$. Si además $\nu = 1$ cuando $\mathsf{f} \in \mathcal{X}^s(\Gamma)$, interpretando f y $\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f}$ como funciones de $\mathcal{C}(E)$, resulta que

$$\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f}(e) = c(e)\left[\sum_{\omega(e')=\omega(e)} \mathsf{f}^s(e') + \sum_{\tau(e')=\tau(e)} \mathsf{f}^s(e') - \sum_{\tau(e')=\omega(e)} \mathsf{f}^s(e') - \sum_{\omega(e')=\tau(e)} \mathsf{f}^s(e')\right]$$

expresión que coincide con la obtenida in [1], ya que en este caso tenemos que $\Delta = \nabla^* \circ \nabla$ y $\boldsymbol{\Delta} = \nabla \circ \nabla^*$.

Proposición 3. *El Laplaciano y el Laplaciano de Hodge son operadores autoadjuntos y semi-definidos positivos. Además las únicas funciones armónicas son las constantes y los campos armónicos son y sólo son los simultáneamente irrotacionales y solenoidales.*

Demostración. Por una parte $\Delta^* = -\nabla^* \circ \mathsf{div}^* = \Delta$, ya que ∇ y div son mutuamente adjuntos, mientras que $\boldsymbol{\Delta}^* = \mathsf{rot}^* \circ \mathsf{rot}^* - \mathsf{div}^* \circ \nabla^* = \boldsymbol{\Delta}$, ya que rot es autoadjunto. Por otra parte, si $u \in \mathcal{C}(V)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, entonces

$$\langle u, \Delta u\rangle_\nu = \langle \nabla u, \nabla u\rangle_r \quad \text{y} \quad \langle \mathsf{f}, \boldsymbol{\Delta}\mathsf{f}\rangle_r = \langle \mathsf{rot}\ \mathsf{f}, \mathsf{rot}\ \mathsf{f}\rangle_r + \langle \mathsf{div}\,\mathsf{f}, \mathsf{div}\,\mathsf{f}\rangle_\nu$$

de donde se concluye la caracterización de funciones y campos armónicos. □

El siguiente resultado es el análogo discreto del *Teorema de Descomposición de Hodge* y su demostración, idéntica a la de su análoga continua, se basa en las relaciones entre los operadores involucrados.

Proposición 4. *Se tienen las siguientes descomposiciones ortogonales*

$$\mathcal{C}(V) = \ker \Delta \oplus \operatorname{Img} \mathsf{div} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}(\Gamma) = \ker \boldsymbol{\Delta} \oplus \operatorname{Img} \nabla \oplus \operatorname{Img} \mathsf{rot}\,.$$

En particular, $H^0(\Gamma) \simeq ker\ \Delta$ y $H^1(\Gamma) \simeq ker\ \boldsymbol{\Delta}$.

Este resultado puede ser fácilmente reinterpretado en términos de la versión discreta del *Teorema de Helmholtz*: *Para cada* $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ *existen una función* $u \in \mathcal{C}(V)$ *y campos* $\mathsf{g}, \mathsf{h} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ *con* h *solenoidal e irrotacional simultáneamente y tales que* $\mathsf{f} = \nabla u + \mathsf{rot}\ \mathsf{g} + \mathsf{h}$. De esta forma, el Teorema de Helmholtz responde adecuadamente a la cuestión principal planteada en [7].

4 Aplicación a redes uniformes n-dimensionales

En esta sección utilizaremos las expresiones de los operadores $\nabla, \mathsf{div}, \mathsf{rot}, \Delta$ y $\boldsymbol{\Delta}$ cuando la red sobre la que están definidos es la retícula uniforme n-dimensional. La mayor parte de las cuestiones que expondremos aquí son susceptibles de ser enmarcadas en un contexto mucho más general dentro del ámbito de los Esquemas en Diferencias para discretizar operadores elípticos con coeficientes constantes. El lector interesado puede consultar [2,3], trabajos en los que se consideran redes más generales que las puramente resistivas tratadas aquí.

Para cada $h > 0$, Γ_h es el grafo cuyo conjunto de nodos es $V_h = h\mathbb{Z}^n$ y donde dos nodos son adyacentes si su distancia euclídea es h. Así pues, cada nodo $x \in V_h$ tiene exactamente $2n$ nodos adyacentes $\{x_j\}_{j=1}^{2n}$ donde si e_j es el j-ésimo vector de la base canónica entonces $x_j = x + h\mathsf{e}_j$ y $x_{n+j} = x - h\mathsf{e}_j$. Para cada $i, j = 1 \dots n$, consideraremos también los nodos $x_{ij} = x + h\,(\mathsf{e}_i + \mathsf{e}_j)$, $x_{in+j} = x + h(\mathsf{e}_i - \mathsf{e}_j)$, $x_{n+i,j} = x + h(\mathsf{e}_j - \mathsf{e}_i)$ y $x_{n+i,n+j} = x - h(\mathsf{e}_i + \mathsf{e}_j)$. Claramente, $x_{in+j} = x_{n+ji}$ y además $x_{in+i} = x$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Fijaremos en Γ_h la orientación en la que $x = \omega(e_{xx_j})$ y $x = \tau(e_{xx_{n+j}})$, para cada $j = 1, \dots, n$. Denominamos *retícula uniforme n-dimensional de tamaño h* a la red (Γ_h, r, ν) donde $\nu(x) = h$, para cada $x \in V_h$ y r es una *resistencia homogénea o uniforme* en el sentido de que existen $r_1, \dots, r_n > 0$ tales que $r(x, x_j) = r(x, x_{n+j}) = hr_j$, $j = 1, \dots, n$ para cada $x \in V_h$. En este caso, es conveniente definir $\mathsf{rot}\,\mathsf{f}(x, x_j) = h^{-2} r(x, x_j) \mathsf{f}^{\mathrm{a}}(x, x_j)$, es decir como $\mathsf{rot}\,\mathsf{f}(x, x_j) = \dfrac{r_j}{h}\,\mathsf{f}^{\mathrm{a}}(x, x_j)$, para cada $j = 1, \dots, 2n$ y cada $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$.

Proposición 5. *Consideremos la resistencia uniforme dada para $j = 1, \dots, n$ como $r(x, x_j) = r(x, x_{n+j}) = hk_j^{-1}$, donde $k_1, \dots, k_n > 0$. Entonces, para cada función $u \in \mathcal{C}(V_h)$, para cada $x \in V_h$ y cada $j = 1, \dots, n$, se satisface que*

$$\nabla u(x, x_j) = \frac{k_j}{h}\big(u(x_j) - u(x)\big) \quad \text{y} \quad \nabla u(x, x_{n+j}) = \frac{k_j}{h}\big(u(x) - u(x_{n+j})\big),$$

para cada campo $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$ se tiene que $\mathsf{div}\,\mathsf{f}(x) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\big[\mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x, x_j) - \mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x, x_{n+j})\big]$,

lo que implica que

$$\Delta_h(u)(x) = \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{n} k_j\big(2u(x) - u(x_j) - u(x_{n+j})\big),$$

es decir, Δ_h es el esquema en diferencias estándar de $2n+1$ nodos para el operador diferencial lineal con coeficientes constantes $L(u) = -\sum\limits_{j=1}^{n} k_j u_{x_j x_j}$. Finalmente, para cada $\mathsf{f} \in \mathcal{X}(\Gamma)$, cada $x \in V_h$ y cada $i = 1, \dots, n$, se tiene

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f}(x, x_i) = \frac{1}{h^2 k_i^2}\,\mathsf{f}^{\mathrm{a}}(x, x_i) &+ \frac{k_j}{h^2}\sum_{j=1}^{n}\big[\mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x, x_j) - \mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x, x_{n+j})\big] \\
&+ \frac{k_j}{h^2}\sum_{j=1}^{n}\big[\mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x_i, x_{in+j}) - \mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x_i, x_{ij})\big] \\
\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f}(x, x_{n+i}) = \frac{1}{h^2 k_i^2}\,\mathsf{f}^{\mathrm{a}}(x, x_{n+i}) &+ \frac{k_j}{h^2}\sum_{j=1}^{n}\big[\mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x, x_{n+j}) - \mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x, x_j)\big] \\
&+ \frac{k_j}{h^2}\sum_{j=1}^{n}\big[\mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x_{n+i}, x_{n+ij}) - \mathsf{f}^{\mathrm{s}}(x_{n+i}, x_{n+in+j})\big]
\end{aligned}$$

Referencias

[1] R. Bacher, P. de la Harpe y T. Nagnibeda. The lattice of integral flows and the lattice of integral coboundaries on a finite graph. *Bull. Soc. Math. France*, 125: 167–198, 1997.

[2] E. Bendito, A. Carmona y A.M. Encinas. Boundary value problems on weighted networks. *Discrete Appl. Math.*, (2008), `http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2008.02.008`

[3] E. Bendito, A. Carmona y A.M. Encinas. Difference schemes on uniform grids performed by general discrete operators. *Appl. Num. Math.*, 50: 343–370, 2004.

[4] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas. The Curl of a Weighted Network. *Aceptado en Appl. Anal. Discrete Math.*

[5] N. Biggs. Algebraic Potential Theory on graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 29: 641–682, 1997.

[6] J. Dodziuk. Laplacian on manifolds and analogous difference operator for graphs. *Contemp. Math.*, 49: 45–49, 1986.

[7] K. Gustafson y F. Harary. The rot of graphs and networks. *Math. Modelling*, 6: 145–155, 1985.

[8] R. Hiptmair. Discrete Hodge Operators. *Numer. Math.*, 90: 265–289, 2001.

[9] T. Kayano y M. Yamasaki. Discrete Dirichlet integral formula. *Discrete Appl. Math.*, 22: 53–68, 1988/89.

[10] M.Rigoli, M. Salvatori y M.Vignati . Liouville properties on graphs. *Mathematika*, 94: 133–148, 1997.

[11] W. Schwalm, B. Moritz, M. Giota y M. Schwalm. Vector difference calculus for physical lattice models. *Phy. Rev. E*, 59: 1217–1233, 1999.

[12] J.P. Serre. *Trees.* Springer-Verlag, 1980.

[13] P.M. Soardi. *Potential Theory on Infinite Networks.* Lect. Notes in Math. 1590, Springer-Verlag, 1994.